在本章中，我们首先回顾维度和单位的概念。 然后，我们回顾了维度同质性的基本原理，并展示了如何将其应用于方程，以便对其进行无量纲化并识别无量纲群。 我们讨论模型和原型之间的相似性概念。 我们还为工程师和科学家描述了一个强大的工具，称为维度分析，其中维度变量、无量纲变量和维度常量组合成无量纲参数减少了问题中必要的独立参数的数量。 我们提出了一种逐步获取这些无量纲参数的方法，称为重复变量法，它仅基于变量和常数的维数。 最后，我们将此技术应用于几个实际问题，以说明其实用性和局限性。

7-1 量纲和单位 2021年7月29日12点56分

维度是物理量的度量（没有数值），而单位是为该维度分配数字的一种方式。 例如，长度是一种以微米 (µm)、英尺 (ft)、厘米 (cm)、米 (m)、千米 (km) 等单位测量的尺寸（图 7-1）。 有七个主要维度（也称为基本维度或基本维度）——质量、长度、时间、温度、电流、光量和物质量。例如，力的维度与质量乘以加速度（牛顿秒 法律）。 因此，就主要维度而言，

其中括号表示“尺寸”，缩写取自表7-1。 您应该知道一些作者更喜欢力而不是质量作为主要维度——我们不遵循这种做法。

7-2 量纲一致性 2021年7月29日12点58分

我们都听过一句老话，你不能加苹果和橙子（图 7-3）。这实际上是方程的一个更为全局和基本的数学定律的简化表达，维度同质定律，表述为，

方程中的每个加性项都必须具有相同的维度。

例如，考虑一个简单的可压缩封闭系统的总能量从一种状态和/或时间 (1) 到另一种 (2) 的变化，如图 7-4 所示。系统总能量的变化 (ΔE) 由下式给出，

其中 E 具有三个分量：内能 (U)、动能 (KE) 和势能 (PE)。这些分量可以用系统质量 (m) 表示；两种状态下的可测量量和热力学特性，例如速度 (V)、高度 (z) 和比内能 (u)；和重力加速度常数 (g)，

很容易验证公式 7-2 的左侧和公式 7-2 右侧的所有三个加性项都具有相同的维度——能量。使用等式 7-3 的定义，我们写出每一项的主要维度，

如果在分析的某个阶段我们发现方程中的两个加性项具有不同的维度，这将清楚地表明我们在分析的某个早期阶段犯了错误（图 7-5） .除了维度同质性之外，只有当每个加性项中的单位也同质时，计算才有效。例如，上述术语中的能量单位可以是J、N·m或kg·m2/s2，它们都是等价的。然而，假设使用 kJ 代替 J 来表示其中一项。与其他项相比，该项将偏离 1000 倍。进行数学计算时最好写出所有单位以避免此类错误。

方程的无量纲化

维数同质定律保证方程中的每个加性项都具有相同的维数。因此，如果我们将方程中的每一项除以具有相同维度的变量和常数的集合，则方程将变为无量纲（图 7-7）。此外，如果方程中的无量纲项具有统一的阶数，则称该方程为归一化的。因此，归一化比无量纲化更具限制性，即使这两个术语有时（错误地）互换使用。

无量纲方程中的每一项都是无量纲的。

在对运动方程进行无量纲化的过程中，经常会出现无量纲参数——其中大部分以著名科学家或工程师的名字命名（例如，雷诺数和弗劳德数）。这个过程被一些作者称为检查分析。作为一个简单的例子，考虑描述物体在重力作用下通过真空（无空气阻力）下落时的高度 z 的运动方程，如图 7-8 所示。物体的初始位置为 z0，其在 z 方向的初始速度为 w0。从高中物理，

维度变量被定义为在问题中发生变化或变化的维度量。对于公式 7-4 中给出的简单微分方程，有二维变量：z（长度维度）和 t（时间维度）。无量纲（或无量纲）变量被定义为在问题中发生变化或变化但没有量纲的量；一个例子是旋转角度，以度或弧度为单位，这是无量纲的单位。万有引力常数 g，虽然维数，但保持不变，称为维数常数。两个额外的维度常数与这个特定问题相关，初始位置 z0 和初始垂直速度 w0。虽然量纲常数可能因问题而异，但它们对于特定问题是固定的，因此与量纲变量不同。我们对问题中的维度变量、非维度变量和维度常量的组合使用术语参数。方程 7-4 很容易通过积分两次并应用初始条件来求解。结果是在任何时间 t 的高程 z 表达式：

公式 7-5 中的常数 12 和指数 2 是积分的无量纲结果。这样的常数称为纯常数。其他纯常数的常见例子是 𝜋 ande。为了对方程 7-4 进行无量纲化，我们需要根据原始方程中包含的主要维度选择缩放参数。在流体流动问题中，通常至少有三个标度参数，例如 L、V 和 P0 − P∞（图 7-9），因为一般问题中至少有三个主要维度（例如，质量、长度、和时间）。在这里讨论的下落物体的情况下，只有两个主要维度，长度和时间，因此我们仅限于选择两个缩放参数。由于我们有三个可用的维度常数 g、z0 和 w0，因此我们在选择缩放参数方面有一些选择。我们选择 z0 和 w0。邀请您使用 g 和 z0 和/或 g 和 w0 重复分析。使用这两个选定的缩放参数，我们将维度变量 z 和 t 无量纲化。第一步是列出问题中所有维度变量和维度常量的主要维度，

第二步是使用我们的两个缩放参数将 z 和 t（通过检查）无量纲化为无量纲变量 z\* 和 t\*，

将方程 7-6 代入方程 7-4 给出，

这是所需的无量纲方程。方程 7-7 中的量纲常数分组是众所周知的无量纲参数或称为弗劳德数的无量纲群的平方，

Froude（发音为“Frude”）数也作为自由表面流中的一个无量纲参数出现（第 13 章），可以被认为是惯性力与重力的比值（图 7-10）。您应该注意到，在一些较旧的教科书中，Fr 被定义为公式 7-8 中所示参数的平方。将方程 7-8 代入方程 7-7 得到：

在无量纲形式中，只剩下一个参数，即弗劳德数。方程 7-9 很容易通过积分两次并应用初始条件来求解。结果是无量纲高程 z\* 作为无量纲时间 t\* 的函数的表达式：

等式 7-5 和 7-10 的比较表明它们是等价的。事实上，为了练习，将公式 7-6 和 7-8 代入公式 7-5 以验证公式 7-10。似乎我们经历了很多额外的代数来生成相同的最终结果。那么无量纲化方程有什么好处呢？在回答这个问题之前，我们注意到在这个简单的例子中优势并不那么明显，因为我们能够对微分运动方程进行解析积分。

在更复杂的问题中，微分方程（或者更一般的微分方程的耦合集）不能通过解析积分，工程师必须对方程进行数值积分，或者设计和进行物理实验以获得所需的结果，这两者都可能导致大量的时间和费用。在这种情况下，通过对方程进行无量纲化生成的无量纲参数非常有用，从长远来看可以节省大量精力和费用。无量纲化有两个主要优点（图 7-11）。首先，它增加了我们对关键参数之间关系的洞察力。例如，等式 7-8 表明，将 w0 加倍与将 z0 减少 4 倍具有相同的效果。其次，它减少了问题中的参数数量。例如，原始问题包含一个因变量 z；一个自变量，t；以及三个额外的维度常数，g、w0 和 z0。无量纲化问题包含一个相关参数 z\*；一个独立参数，t\*；只有一个附加参数，即无量纲的弗劳德数，Fr。附加参数的数量已从三个减少到一个！示例 7-3 进一步说明了无量纲化的优点。

如果您仍然不相信对方程和参数进行无量纲化有许多优点，请考虑：为了合理地记录示例 7-3 中所有三个维数参数 g、z0 和 w0 的范围的轨迹，蛮力方法需要几个（比如至少四个）额外的图，如图 7-12a 在 w0 的不同值（水平），以及针对 g 范围的几组额外的此类图。三个参数的完整数据集，每个参数有五个级别，需要 53 = 125 次实验！无量纲化将参数的数量从三个减少到一个——对于相同的分辨率，总共只需要 51 = 5 次实验。 （对于五个级别，只需要像图 7-13 所示的五个无量纲轨迹，在 Fr 值上仔细选择。）无量纲化的另一个优点是外推到一个或多个维数参数的未测试值是可能的。例如，示例 7-3 的数据仅在一个重力加速度值下获取。假设您想将这些数据外推到不同的 g 值。示例 7–4 显示了如何通过无量纲数据轻松实现这一点。

流体流动的运动微分方程在第 9 章中推导和讨论。在第 10 章中，您将找到与此处介绍的类似的分析，但适用于流体流动的微分方程。事实证明，该分析中也出现了弗劳德数，以及其他三个重要的无量纲参数——雷诺数、欧拉数和斯特劳哈尔数（图 7-15）。

7-3 量纲分析和相似性 2021年7月29日13点23分

只有当我们知道方程开始时，通过检查对方程进行无量纲化才有用。然而，在现实工程中的许多情况下，方程要么未知，要么太难求解；很多时候，实验是获得可靠信息的唯一方法。在大多数实验中，为了节省时间和金钱，测试是在几何比例模型上进行的，而不是在全尺寸原型上进行。在这种情况下，必须注意正确缩放结果。我们在此介绍一种称为维度分析的强大技术。虽然通常教授流体力学，但量纲分析在所有学科中都很有用，尤其是在需要设计和进行实验时。我们鼓励您在其他学科中也使用这个强大的工具，而不仅仅是在流体力学中。量纲分析的三个主要目的是生成有助于实验设计（物理和/或数值）和报告实验结果的无量纲参数获得缩放定律，以便从模型性能预测原型性能到（有时）预测趋势在参数之间的关系讨论量纲分析技术之前，我们首先解释量纲分析的基本概念——相似性原理。模型和原型之间完全相似需要三个必要条件。第一个条件是几何相似性——模型必须与原型具有相同的形状，但可以通过某个恒定比例因子进行缩放。第二个条件是运动学相似性，这意味着模型流中任意点的速度必须与原型流中相应点的速度成正比（通过恒定比例因子）（图 7-16）。具体来说，对于运动学相似性，相应点的速度必须按幅度缩放，并且必须指向相同的相对方向。您可以将几何相似性视为长度尺度等价，将运动学相似性视为时间尺度等价。几何相似性是运动学相似性的前提。正如几何比例因子可以小于、等于或大于 1，速度比例因子也可以。例如，在图 7-16 中，几何比例因子小于 1（模型小于原型），但速度比例大于 1（模型周围的速度大于原型周围的速度）。您可能还记得第 4 章中的流线是运动学现象；因此，当实现运动学相似性时，模型流中的流线模式是原型流中流线模式的几何缩放副本。第三个也是最严格的相似性条件是动态相似性。当模型流中的所有力与原型流中的相应力（力-标度等效）按恒定因子缩放时，就实现了动态相似性。与几何和运动学相似性一样，力的比例因子可以小于、等于或大于 1。例如，在图 7-16 中，力比例因子小于 1，因为模型构建上的力小于原型上的力。运动相似性是动态相似性的必要但不充分条件。因此，模型流程和原型流程可以同时实现几何和运动学相似性，但不能实现动态相似性。所有三个相似性条件都必须存在才能确保完全相似。我们让大写的希腊字母 Pi (Π) 表示一个无量纲参数。在第 7-2 节中，我们已经讨论了一个 Π，即弗劳德数，Fr。在一般的维数分析问题中，有一个 Π，我们称之为从属 Π，给它记号 Π1。参数 Π1 通常是其他几个 Π 的函数，我们称之为独立的 Π。函数关系是，

其中 k 是 Π 的总数。考虑一个实验，其中测试比例模型以模拟原型流。为保证模型与原型完全相似，模型的每个独立Π（下标m）必须与原型对应的独立Π（下标p）相同，即Π2, m = Π2, p, Π3, m = Π3, p, . . . , Πk, m = Πk, p。在这些条件下，模型的依赖 Π (Π1, m) 也保证等于原型的依赖 Π (Π1, p)。在数学上，我们写了一个条件语句来实现相似性，

例如，考虑设计一款新跑车，其空气动力学将在风洞中进行测试。为了省钱，最好测试一个小型的、几何比例的汽车模型，而不是汽车的全尺寸原型（图 7-17）。在汽车上的空气动力阻力的情况下，如果流动近似为不可压缩，则问题中只有两个 Π，

用于生成这些 Π 的程序在第 7-4 节中讨论。在方程 7-13 中，FD 是汽车上的气动阻力的大小，𝜌 是空气密度，V 是汽车的速度（或风洞中空气的速度），L 是汽车的长度，而 𝜇 istheviscosityoftheair。Π1 是阻力系数的非标准形式，Π2 是雷诺数 Re。您会发现流体力学中的许多问题都涉及雷诺数（图 7-18）。

雷诺数是所有流体力学中最著名和最有用的无量纲参数。

在手头的问题中只有一个独立的 Π，等式 7-12 确保如果独立的 Π 匹配（雷诺数匹配：Π2, m = Π2, p），那么从属 Π 也匹配（Π1, m = Π1, p)。这使工程师能够测量模型车上的气动阻力，然后使用该值来预测原型车上的气动阻力。

一旦我们确信模型测试和原型流程之间已经实现了完全相似，就可以再次使用公式 7-12 来基于模型性能的测量来预测原型的性能。 示例 7–6 对此进行了说明。

维度参数（密度、速度等）的实际值无关紧要这一事实进一步说明了使用维度分析和相似性来补充实验分析的能力。 只要将相应的独立 Π 设置为彼此相等，就可以实现相似性——即使使用不同的流体。 这就解释了为什么可以在水洞中模拟汽车或飞机的性能，而在风洞中可以模拟潜艇的性能（图 7-21）。 例如，假设示例 7-5 和 7-6 中的工程师使用水洞而不是风洞来测试他们的五分之一比例模型。 使用室温下水的特性（假设为 20°C），实现相似性所需的水道速度很容易计算为，

可以看出，水洞的一个优点是所需的水洞速度远低于使用相同尺寸模型的风洞所需的速度。

7-4 重复变量的方法和白金汉 PI 定理 2021年7月29日14点03分

我们已经看到了几个维度分析的有用性和力量的例子。现在我们准备学习如何生成无量纲参数，即 Π's。为此目的开发了多种方法，但最流行（也是最简单）的方法是重复变量的方法，由 Edgar Buckingham (1867–1940) 推广。该方法由俄罗斯科学家 Dimitri Ria bou-chinsky (1882–1962) 于 1911 年首次发表。我们可以将这种方法视为获取无量纲参数的逐步程序或“配方”。共有六个步骤，图 7-22 中简要列出，表 7-2 中列出了更详细的信息。在我们解决许多示例问题时，将更详细地解释这些步骤。与大多数新程序一样，最好的学习方法是通过实例和实践。作为第一个简单的例子，考虑第 7-2 节中讨论的落入真空中的球。让我们假设我们不知道公式 7-4 适合这个问题，我们也不知道很多关于坠落物体的物理学。事实上，假设我们只知道球的瞬时高度 z 必须是时间 t、初始垂直速度 w0、初始高度 z0 和重力常数 g 的函数（图 7-23）。量纲分析的美妙之处在于，我们唯一需要知道的另一件事是这些量中的每一个的主要量纲。当我们完成重复变量方法的每个步骤时，我们以落球为例更详细地解释了该技术的一些微妙之处。 在此有五个参数（维度变量、非维度变量和维度常量）问题; n = 5. 它们以函数形式列出，因变量被列为独立变量和常数的函数：

此处列出了每个参数的主要维度。我们建议用指数来写每个维度，因为这有助于以后的代数。

作为第一个猜测，j 设置为等于 2，即问题中表示的主要维度的数量（L 和 t）。

如果 j 的这个值是正确的，白金汉 Pi 定理预测的 Π 的数量是，我们需要选择两个重复参数，因为 j = 2。因为这通常是方法中最难（或至少最神秘）的部分对于重复变量，表 7-3 中列出了一些关于选择重复参数的指南。遵循下一页表 7-3 的指导原则，最明智的选择两个重复参数是 w0 和 z0。

现在我们将这些重复参数组合成与剩余参数中的每一个的乘积，一次一个，以创建 Π's。第一个 Π 始终是从属 Π 并由因变量 z. 形成，其中 a1 和 b1 是需要确定的常数指数。我们将步骤 2 的主要维度应用到公式 7-15 中，并通过将每个主要维度的指数设置为零来强制 Π 为无量纲：

由于主维度在定义上彼此独立，因此我们将每个主维度的指数独立相等以求解指数 a1 和 b1（图 7-24）。

方程 7-15 因此变成，

以类似的方式，我们通过将重复参数与自变量 t 组合来创建第一个独立的 Π (Π2)。

等式指数，

Π2 因此，

最后，我们通过将重复参数与 g 组合并强制 Π 为无量纲来创建第二个独立的 Π (Π3)（图 7-26）。

等式指数，Π3 因此，

所有三个 Π 都已找到，但此时最好检查它们以查看是否需要进行任何操作。我们立即看到 Π1 和 Π2 与等式 7-6 定义的无量纲变量 z\* 和 t\* 相同 - 不需要对它们进行操作。然而，我们认识到第三个 Π 必须增加到 -12 的幂才能与已建立的无量纲参数具有相同的形式，即方程 7-8 的弗劳德数：

这种操作通常是将 Π 置于适当的建立形式所必需的。方程 7-18 的 Π 没有错，方程 7-19 与方程 7-18 相比肯定没有数学优势。相反，我们喜欢说公式 7-19 比公式 7-18 更“被社会接受”，因为它是文献中常用的命名的、已建立的无量纲参数。表 7-4 列出了将无量纲 Π 群处理为已建立的无量纲参数的一些指导原则。表 7-5 列出了一些已建立的无量纲参数，其中大部分以著名科学家或工程师的名字命名（参见图 7-27 和第 317 页的历史聚焦）。这份清单绝不是详尽无遗的。只要有可能，您应该根据需要操纵您的 Π，以便将它们转换为已建立的无量纲参数。

我们应该仔细检查 Π 是否确实是无量纲的（图 7-28）。对于本示例，您可以自行验证这一点。我们终于准备好写出无量纲参数之间的函数关系了。将等式 7-16、7-17 和 7-19 组合成等式 7-11 的形式，

或者，根据先前由方程 7-6 定义的无量纲变量 z\* 和 t\* 以及弗劳德数的定义，将方程 7-20 的量纲分析结果与精确分析结果进行比较是有用的，公式 7-10。重复变量的方法正确地预测了无量纲组之间的函数关系。然而，

重复变量的方法无法预测方程的确切数学形式。

这是量纲分析和重复变量方法的基本限制。然而，对于一些简单的问题，方程的形式可以预测为一个未知常数，如例 7-7 所示。（续）

回想一下，在示例 7-5 和 7-6 中，原型车的空气速度是 50.0 英里/小时，风洞的空气速度是 221 英里/小时。在 25°C 时，这对应于 Map = 0.065 的原型马赫数，而在 5°C 时，风洞的马赫数为 0.29——位于不可压缩极限的边界线上。事后看来，我们应该在我们的量纲分析中包括声速，这会产生马赫数作为额外的 Π。在保持低马赫数的同时匹配雷诺数的另一种方法是使用诸如水之类的液体，因为液体几乎不可压缩，即使在相当高的速度下也是如此。

为了验证示例 7-9 中方程 1 的有效性，我们使用计算流体动力学 (CFD) 来预测两种物理上不同但动态相似的管道流的速度分布和壁面剪应力值：300 K 下的空气以通过内径为 1.00 英尺、平均粗糙度高度为 0.0010 英尺的管道的平均速度为 14.5 英尺/秒。 300 K 下的水以 3.09 米/秒的平均速度通过内径为 0.0300 米、平均粗糙度高度为 0.030 毫米的管道.这两个管子在几何上很相似，因为它们都是圆管。它们具有相同的平均粗糙度比（两种情况下的 𝜀 /D = 0.0010）。我们仔细选择了平均速度和直径的值，以便两个流也动态相似。具体来说，另一个独立的 Π（雷诺数）也在两个流之间匹配。

其中流体属性是内置在 CFD 代码中的那些，并且，

因此，根据等式 7-12，我们期望依赖的 Π 也应该在两个流之间匹配。我们为两种流中的每一种生成计算网格，并使用商业 CFD 代码生成速度剖面，从中计算剪切应力。比较了两个管道远端附近的完全发展的、时间平均的湍流速度剖面。尽管管道直径不同，流体也大不相同，但速度剖面形状看起来非常相似。事实上，当我们将归一化轴向速度 (u/V) 绘制为归一化半径 (r/R) 的函数时，我们发现两个轮廓相互重叠（图 7-36）。壁面剪应力也可以从每个流动的 CFD 结果计算出来，表 7-6 显示了它们的比较。水管壁面剪应力比风管壁面剪应力大几个数量级的原因有很多。也就是说，水的密度是空气的 800 多倍，是空气的 50 倍以上。此外，剪应力与速度梯度成正比，水管直径小于空气管直径的十分之一，导致速度梯度更陡。然而，就无量纲化壁面剪应力 f 而言，表 7-6 表明由于两种流动之间的动态相似性，结果是相同的。请注意，尽管这些值报告为三位有效数字，但 CFD 中湍流模型的可靠性最多可精确到两位有效数字（第 15 章）。

7-5 实验测试、建模和不完全相似性

量纲分析最有用的应用之一是设计物理和/或数值实验，以及报告此类实验的结果。 在本节中，我们将讨论这两种应用，并指出无法实现完全动态相似的情况。

实验的设置和实验数据的相关性

作为一个通用示例，考虑一个问题，其中有五个原始参数（其中一个是从属参数）。一套完整的实验（称为全因子测试矩阵）是通过测试四个独立参数中每一个的几个级别的每种可能组合来进行的。对四个独立参数中的每一个进行五个水平的全因子检验将需要 54 = 625 次实验。虽然实验设计技术（部分因子测试矩阵；参见 Montgomery，2013）可以显着减少测试矩阵的大小，但所需的实验数量仍然很大。但是，假设问题中表示三个主要维度，我们可以将参数的数量从五个减少到两个（k = 5 − 3 = 2 个无维 Π 组），并将独立参数的数量从四个减少到一个。因此，对于相同的分辨率（每个独立参数的五个测试级别），我们总共只需要进行 51 = 5 次实验。您不必是天才也能意识到用 5 个实验代替 625 个实验具有成本效益。您可以看到为什么在进行实验之前进行维度分析是明智的。继续我们对这个通用示例（二 Π 问题）的讨论，一旦实验完成，我们将相关无量纲参数 (Π1) 绘制为独立无量纲参数 (Π2) 的函数，如图 7-37 所示.然后我们通过对数据进行回归分析来确定关系的函数形式。如果幸运的话，数据可能呈线性相关。如果不是，我们可以在log-linear或log-log坐标上尝试线性回归，多项式曲线拟合等，建立两个Π之间的近似关系。有关这些曲线拟合技术的详细信息，请参阅 Holman (2001)。如果问题中有两个以上的 Π（例如，三 Π 问题或四 Π 问题），我们需要建立一个测试矩阵来确定依赖 Π 和独立 Π 之间的关系。在许多情况下，我们发现一个或多个相关 Π 的影响可以忽略不计，可以从必要的无量纲参数列表中删除。正如我们所见（例 7-7），量纲分析有时只产生一个 Π。在 one-Π 问题中，我们知道原始参数与某个未知常数之间的关系形式。在这种情况下，只需进行一次实验即可确定该常数。

不完全相似

我们已经展示了几个例子，其中通过直接使用重复变量的方法，可以用纸和铅笔轻松获得无量纲 Π 群。 事实上，经过充分的练习，您应该能够轻松获得 Π——有时在您的脑海中或在“信封的背面”。 不幸的是，当我们将维度分析的结果应用于实验数据时，情况往往大不相同。 问题是，即使我们小心地实现几何相似性，也不总是可以将模型的所有 Π 与原型的相应 Π 相匹配。 这种情况称为不完全相似。 幸运的是，在某些不完全相似的情况下，我们仍然能够推断模型测试数据以获得合理的全面预测。

风洞测试

我们说明了与在风洞中测量模型卡车上的空气动力阻力的问题不完全相似（图 7-38）。假设我们购买了一个 16 分之一比例的拖拉机拖车设备（18 轮车）压铸模型。该模型在几何上与原型相似——甚至在后视镜、挡泥板等细节方面也是如此。模型卡车长 0.991 m，对应于 15.9 m 的全尺寸原型长度。模型卡车将在最大速度为 70 m/s 的风洞中进行测试。风洞测试部分高 1.0 m，宽 1.2 m，足够容纳模型，无需担心壁面干扰或堵塞效应。风洞中的空气与原型周围的空气处于相同的温度和压力。我们想在全尺寸原型卡车上模拟 Vp = 60 mi/h (26.8 m/s) 的流量。我们做的第一件事是匹配雷诺数，

可以求解模型试验所需的风洞速度 Vm，

因此，为了匹配模型和原型之间的雷诺数，风洞应以 429 m/s（三位有效数字）运行。我们显然在这里遇到了问题，因为这个速度是最大可达到的风洞速度的六倍以上。此外，即使我们能以如此快的速度运行风洞，气流也会是超音速的，因为室温下空气中的声速约为 346 m/s。虽然原型卡车在空气中移动的马赫数为 26.8/335 = 0.080，但在模型上移动的风洞空气的马赫数将为 429/335 = 1.28（如果风洞可以走那么快）。显然不可能将模型雷诺数与具有该模型和风洞设施的原型的雷诺数相匹配。我们做什么？有几种选择：如果我们有一个更大的风洞，我们可以用更大的模型进行测试。汽车制造商通常在非常大的风洞中使用八分之三比例的模型汽车和八分之一比例的模型卡车和公共汽车进行测试。一些风洞甚至足以进行全尺寸汽车测试（图 7-39a）。然而，您可以想象，风洞和模型越大，测试成本就越高。我们还必须注意模型对于风洞来说不要太大。一个有用的经验法则是堵塞（模型正面面积与测试部分横截面面积的比率）应小于 7.5%。否则，风洞壁会对几何和运动相似性产生不利影响。我们可以使用不同的流体进行模型测试。例如，与相同尺寸的风洞相比，水洞可以获得更高的雷诺数，但它们的建造和运行成本要高得多（图 7-39b）。我们可以对风洞加压和/或调节空气温度以达到增加最大雷诺数能力。虽然这些技术可以提供帮助，但雷诺数的增加是有限的。如果所有其他方法都失败了，我们可以以接近最大速度的几种速度运行风洞，然后将我们的结果外推到完整的雷诺数。幸运的是，它事实证明，对于许多风洞测试，最后一个选项是非常可行的。虽然阻力系数 CD 在 Re 值较低时是雷诺数的强函数，但当 Re 高于某个值时，CD 通常趋于平稳。换句话说，对于许多物体上的流动，尤其是像卡车、建筑物等“虚张声势”的物体，流动是雷诺数独立于 Re 的某个阈值以上（图 7-40），通常当边界层和尾流两者都完全动荡。

具有自由表面的流动

对于自由表面流动的模型测试（船和船、洪水、河流、渡槽、水电站大坝溢洪道、波浪与码头的相互作用、土壤侵蚀等），会出现复杂情况，从而排除了模型之间的完全相似性和原型。例如，如果建造一个模型河流来研究洪水，由于实验室空间有限，模型通常比原型小几百倍。如果模型的垂直尺寸按比例缩放，模型河流的深度将如此之小，以至于表面张力效应（和韦伯数）将变得重要，甚至可能主导模型流，即使表面张力效应是在原型流程中可以忽略不计。此外，虽然实际河流中的流动可能是湍流，但模型河流中的流动可能是层流的，特别是如果河床的坡度在几何上与原型相似。为了避免这些问题，研究人员经常使用扭曲模型，其中模型的垂直尺度（例如，河流深度）与模型的水平尺度（例如，河流宽度）相比被夸大了。此外，模型河床坡度通常比原型坡度成比例地陡峭。由于缺乏几何相似性，这些修改导致不完整的相似性。在这些情况下，模型测试仍然有用，但需要其他技巧（例如故意使模型表面粗糙）以及经验修正和相关性，以适当地放大模型数据。在许多涉及自由表面的实际问题中，雷诺数和弗劳德数在量纲分析中都作为相关的独立 Π 群出现（图 7-42）。很难（通常不可能）同时匹配这两个无量纲参数。对于具有长度标度 L、速度标度 V 和运动粘度 𝜈 的自由表面流动，当雷诺数在模型和原型之间匹配时，

当模型和原型之间的 Froude 数匹配时，

为了匹配 Re 和 Fr，我们针对所需的长度比例因子 Lm/Lp 同时求解方程 7-21 和 7-22，

从公式 7-23 中消除比率 Vm/Vp，我们看到，

因此，为了确保完全相似（假设可以实现几何相似性而没有前面讨论的不需要的表面张力效应），我们需要使用运动粘度满足方程 7-24 的液体。尽管有时可以找到适合模型使用的液体，但在大多数情况下，这要么不切实际，要么不可能，如示例 7-11 所示。在这种情况下，匹配弗劳德数比匹配雷诺数更重要（图 7-43）。

在关于实验和不完全相似的这一节结束时，我们提到了相似性在好莱坞电影制作中的重要性，在这些电影中，模型船、火车、飞机、建筑物、怪物等被炸毁或烧毁。 电影制作人必须注意动态相似性，才能使小规模的火灾和爆炸尽可能逼真。 您可能还记得一些低预算的电影，其中的特效并不令人信服。 在大多数情况下，这是由于小模型和全尺寸原型之间缺乏动态相似性。 如果模型的 Froude 数和/或 Reynolds 数与原型的相差太大，即使是未经训练的眼睛，特效看起来也不对。 下次您看电影时，请注意不完全相似的情况！